
OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 15 februarie 2015
CLASA a V-a

1. a) Calculați $a = (2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} + \dots + 2^{n+10}) : 2^n - 2^5$;
b) Determinați numerele naturale x, y și z pentru care $5^z \cdot \overline{xy} \cdot \overline{yx} = a$, unde a este numărul determinat mai sus.
2. Câtul împărțirii a două numere naturale este cu 3 mai mare decât restul. Aflați cele două numere, știind că diferența dintre deîmpărțit și triplul împărțitorului este 15.
3. Determinați mulțimile A și B , știind că satisfac simultan condițiile:
 - 1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;
 - 2) $A \cap B = \{3, 4\}$;
 - 3) $A \cap \{5, 6, 7\} = \emptyset$;
 - 4) $\{1, 2\} \cap B \neq \emptyset$.
4. Se consideră opt numere naturale distincte. Efectuând toate sumele oricăror șapte dintre ele, se obțin rezultatele: 42, 47, 50, 52, 54, 55, 56 și 57. Determinați cele opt numere.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.

Timp de lucru: 2 ore. Se acordă 30 de minute în plus pentru întrebări.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 15 februarie 2015
CLASA a VI-a

1. Determinați numerele naturale de forma \overline{xyzt} (x, y, z, t cifre în baza zece) care admit exact 12 divizori naturali și $\frac{xy}{zt} = 3$.
2. Găsiți toate perechile de numere naturale distincte a, b pentru care are loc relația:
 $3(a, b) + 2[a, b] = 140$, unde (a, b) reprezintă c.m.m.d.c al numerelor a, b , iar $[a, b]$ este c.m.m.m.c al numerelor a, b .
3. Fie punctele coliniare A, B, C, D în această ordine. Dacă M, N, P sunt mijloacele segmentelor $(AB), (BC), (CD)$ și $MN = 9\text{cm}, NP = 7\text{cm}$, iar $AB + CD = 16\text{cm}$, să se calculeze lungimile segmentelor $(AB), (BC), (CD)$.
4. Se consideră n unghiuri adiacente în jurul unui punct. Dacă primul unghi se mărește cu 1° , al doilea unghi se micșorează cu 2° , al treilea unghi se mărește cu 3° , al patrulea unghi se micșorează cu 4° și așa mai departe, astfel se obțin unghiuri cu măsuri egale (exprimate printr-un număr natural). Se cere:
 - a) Arătați că, în condițiile date, nu pot fi construite astfel trei unghiuri adiacente în jurul unui punct;
 - b) Determinați cel mai mic număr n posibil de unghiuri adiacente în jurul unui punct în condițiile date.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.

Timp de lucru: 2 ore. Se acordă 30 de minute în plus pentru întrebări.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 15 februarie 2015
CLASA a VII-a

1. Fie numerele $a = |2\sqrt{3} - 4|$ și $b = \sqrt{(5 - 3\sqrt{3})^2}$.
 - a) Comparați cele două numere;
 - b) Calculați diferența dintre media aritmetică și semiprodusul celor două numere.
2. Arătați că nu există numere reale x și y pentru care $x > 2$, $y > 2$, $xy = 6$ și $x + y \geq 5$.
3. Fie trapezul $ABCD$ în care $m(\angle A) = m(\angle D) = 90^\circ$, $BD \perp BC$ și $AB = \frac{DC}{4}$. Dacă M și N sunt mijloacele segmentelor (DC) și (BM) , arătați că $DN \perp BM$.
4. Fie M un punct în interiorul triunghiului ABC , astfel încât $\angle ABM \equiv \angle ACM$. Dacă P și Q sunt picioarele perpendicularelor din M pe AB , respectiv pe AC , iar E este mijlocul lui $[BC]$, arătați că $[EP] \equiv [EQ]$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.

Timp de lucru: 3 ore

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 15 februarie 2015
CLASA a VIII-a

1. Găsiți numerele prime x și y din inegalitatea: $4^{x+2} + 4^{y-3} \leq 2^{x+y}$.
2. Să se afle numerele reale $a \geq 1, b \geq 2$ și $c \geq 3$, știind că:
$$a + b + c = 2(\sqrt{a-1} + \sqrt{b-2} + \sqrt{c-3}) + 3.$$
3. Fie $VABC$ o piramidă regulată cu baza $\triangle ABC$ și M mijlocul segmentului $[BC]$.
Dacă sinusul unghiului dintre planele (VAB) și (VAM) este $\frac{\sqrt{3}}{3}$, arătați că $VABC$ este un tetraedru regulat.
4. Fie pătratul $ABCD$ și triunghiul ABF isoscel, situate în plane diferite,
 $AB = 6\text{ cm}$, $m(\angle ABF) = 120^\circ$, astfel încât $CM \perp (ABF)$, $M \in (AF)$.
 - a) Aflați distanța de la punctul M la planul (ABC) .
 - b) Aflați măsura unghiului format de dreptele AD și BF .

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.

Timp de lucru: 3 ore